

Correction du DM n°3

Exercice 1

Partie I

- (a) B_k est le produit de $n - 1$ fonctions polynômes de degré 1, comme le degré d'un produit de polynômes est la somme de leurs degrés on a bien $\deg(B_k) = n - 1$.
(b) Si $k \neq i$ alors $1 \leq i \leq n$ et $i \neq k$ donc $(x - x_i)$ apparait dans le produit $B_k(x) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x - x_j)$ (pour $j = i$) donc $B_k(x_i) = 0$ (c'est un produit qui contient le terme $x_i - x_i = 0$).

Si $k = i$, alors $B_k(x_k) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_k - x_j)$ et pour tout j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ différent de k on a $x_k - x_j \neq 0$ comme les x_j sont tous distincts. $B_k(x_k)$ est un produit de termes tous non nuls donc est non nul.

- (a) $B_k(x_k)$ est une constante non nul et B_k est une fonction polynôme de degré $n - 1$, donc $\frac{B_k}{B_k(x_k)}$ est une fonction polynôme de degré $n - 1$.
(b) Soit $(k, i) \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Si $k \neq i$ alors $B_k(x_i) = 0$ donc $L_k(x_i) = \frac{B_k(x_i)}{B_k(x_k)} = 0$ et si $k = i$ alors $L_k(x_k) = \frac{B_k(x_k)}{B_k(x_k)} = 1$.

- (c) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $Q(x_i) = \sum_{k=1}^n y_k L_k(x_i) = y_i L_i(x_i)$ car tous les autres termes sont nuls, donc $Q(x_i) = y_i \times 1 = y_i$. De plus, Q est une somme de fonctions polynômes de degré $n - 1$ donc est de degré inférieur ou égal à $n - 1$. Ainsi Q répond au problème posé.
3. (a) P et Q sont de degré $n - 1$ donc $\deg(P - Q) \leq \max(\deg P, \deg Q) \leq n - 1$ donc $P - Q$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$.
(b) Pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $(P - Q)(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = y_i - y_i = 0$ donc $P - Q$ admet bien n racines distinctes, les réels x_1, \dots, x_n .

Un polynôme non nul de degré $n - 1$ peut avoir au plus $n - 1$ racines distinctes, c'est donc que $P - Q$ est nul donc $P = Q$. Il y a donc unicité de la solution au problème posé.

Partie II

- Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et soient λ et μ deux réels. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(x_1), \dots, (\lambda P + \mu Q)(x_n)) \\ &= (\lambda P(x_1) + \mu Q(x_1), \dots, \lambda P(x_n) + \mu Q(x_n)) \\ &= \lambda(P(x_1), \dots, P(x_n)) + \mu(Q(x_1), \dots, Q(x_n)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) \end{aligned}$$

donc φ est bien une application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vers \mathbb{R}^n .

- Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors $(P(x_1), \dots, P(x_n)) = (0, \dots, 0)$ donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(x_k) = 0$. On en déduit que P admet n racines distinctes, et comme le degré de P est inférieur ou égal à n on en conclut que P est le polynôme nul. Ainsi $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ donc φ est injective.
6. On sait d'après le cours que $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n - 1 + 1 = n$ et que $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. Comme φ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vers \mathbb{R}^n on en conclut que φ est bijective. Tout élément $y = (y_1, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n admet donc un unique antécédent P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est à dire un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(x_k) = y_k$.

Exercice 2

- X_1 et X_2 sont des variables indicatrices donc suivent des lois de Bernoulli.

$(X_1 = 1)$ est réalisé si et seulement si la première boule tirée est blanche ce qui arrive avec probabilité $\frac{b}{b+r}$, donc

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right).$$

$(X_2 = 1)$ est réalisé si et seulement si la deuxième boule tirée est blanche. Si on note B_1 et B_2 les événements « la première boule est blanche » et « la deuxième boule est blanche », alors la famille d'événement $(B_1, \overline{B_1})$ forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(X_2 = 1) &= P(B_2) \\
 &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(B_2) \\
 &= \frac{b}{b+r} \times \frac{b+1}{b+r+1} + \frac{r}{b+r} \times \frac{b}{b+r+1} \\
 &= \frac{b(b+1) + rb}{(b+r)(b+r+1)} \\
 &= \frac{b(b+1+r)}{(b+r)(b+r+1)} \\
 &= \frac{b}{b+r}
 \end{aligned}$$

donc on a aussi $X_2 \leftrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$

2. Au bout de n tirages le nombre de boules blanches dans l'urne est un entier compris entre b (le nombre de boule de départ) et $b+n$ (le nombre maximum possible de boule blanche dans l'urne à ce moment). La famille d'événements $(S_n = k)_{b \leq k \leq b+n}$ est donc un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}
 P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=b}^{b+n} P(S_n = k) \times P_{[S_n=k]}(X_{n+1} = 1) \\
 &= \sum_{k=b}^{b+n} P(S_n = k) \times \frac{k}{b+r+1} \\
 &= \frac{1}{b+r+1} \times \sum_{k=b}^{b+n} k P(S_n = k) \\
 &= \frac{1}{b+r+1} \times E(S_n) \\
 &= \frac{E(S_n)}{b+r+1}
 \end{aligned}$$

3. On raisonne par récurrence forte sur n , la propriété étant déjà prouvée pour $n = 1$ et $n = 2$ dans la question 1.

- **Hérédité** : Supposons que pour un certain entier n , X_k suit bien la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout entier k entre 1 et n . Remarquons que pour tout entier naturel n non nul on a $S_n = b + \sum_{k=1}^n X_k$. Il s'ensuit par linéarité de l'espérance que $E(S_n) = b + \sum_{k=1}^n E(X_k) = b + \frac{bn}{b+r}$.

On en déduit, d'après la question précédente, que :

$$\begin{aligned}
 P(X_{n+1} = 1) &= \frac{b + \frac{bn}{b+r}}{b+r+n} \\
 &= \frac{b(b+r+n)}{(b+r)(b+r+n)} \\
 &= \frac{b}{b+r}
 \end{aligned}$$

donc X_{n+1} suit aussi la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$.

- **Conclusion** : Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+n}\right)$.

4. $(S_n = 1)$ est réalisé si et seulement si toutes les boules tirées sont rouges. On a donc :

$$\begin{aligned}
P(S_n = 1) &= P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap \dots \cap [X_n = 0]) \\
&= P(X_1 = 0) \times P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) \times \dots \times P_{[X_1=0] \cap \dots \cap [X_{n-1}=0]}(X_n = 0) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} \\
&= \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \qquad \qquad \qquad \text{par télescopage}
\end{aligned}$$

de même, $(S_n = n+1)$ est réalisé si et seulement si toutes les boules tirées sont blanches, donc par symétrie on a également $P(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$.

5. L'événement $(S_{n+1} = k)$ n'est compatible qu'avec les événements $(S_n = k-1)$ et $(S_n = k)$ dans le système complet d'événements $(S_n = i)_{1 \leq i \leq n+1}$. En effet, le nombre de boules blanches présentent dans l'urne peut uniquement augmenter de 1 ou rester le même à chaque tirage. Ainsi d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k) &= P(S_n = k-1) \times P_{[S_n=k-1]}(S_{n+1} = k) + P(S_n = k) \times P_{[S_n=k]}(S_{n+1} = k) \\
&= P(S_n = k-1) \times \frac{k-1}{n+2} + P(S_n = k) \times \frac{n+2-k}{n+2}
\end{aligned}$$

en effet, pour le $n+1$ -ème tirage, la probabilité que le nombre de boule blanche augmente de 1 est la probabilité de tirer une boule blanche, si l'urne en comporte $k-1$ et que n tirages se sont écoulés alors elle contient $n+2$ boules en tout donc cette probabilités est $P_{[S_n=k-1]}(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2}$.

La probabilité que le nombre de boules blanches reste le même est la probabilité de tirer une boule rouge. Si l'urne comporte k boules blanches et que n tirages se sont écoulés alors elle comporte $n+2$ boules en tout dont $n+2-k$ boules rouges, d'où $P_{[S_n=k]}(S_{n+1} = k) = \frac{n+2-k}{n+2}$.

Pour montrer que S_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on peut raisonner par récurrence sur n .

- **Initialisation** : Pour $n = 1$, $P(S_n = 1) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$ et $P(S_n = 2) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ donc S_1 suit la loi uniforme sur $\{1, 2\}$.
- **Hérédité** : Supposons que pour un entier n donné S_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Pour $k = 1$ ou $k = n+2$, on a déjà montré que $P(S_{n+1} = 1) = P(S_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+2}$ dans la question 4.

Pour $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, en reprenant le résultat établi précédemment :

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k) &= \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k) \\
&= \frac{k-1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \times \frac{1}{n+1} \qquad \qquad \qquad \text{car } S_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket) \text{ par HR} \\
&= \frac{k-1 + n+2-k}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

Le résultat est donc encore vrai au rang $n + 1$.

- **Conclusion** : Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$.

Exercice 3

Cas où $\alpha \leq 0$

1. Si $\alpha = 0$ alors $\frac{1}{n^\alpha}$ est constant égal à 1 donc ne tend pas vers 0. Si $\alpha < 0$, alors $\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc ne tend pas non plus vers 0. Dans les deux cas, la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Cas où $\alpha = 1$

2. Posons $f(x) = \ln(x)$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. f est continue sur $[n, n + 1]$ et dérivable sur $]n, n + 1[$, donc d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel c dans l'intervalle $]n, n + 1[$ tel que :

$$f(n + 1) - f(n) = f'(c)(n + 1 - n)$$

c'est à dire :

$$\ln(n + 1) - \ln(n) = \frac{1}{c}$$

Or $n < c < n + 1$ donc $\frac{1}{n + 1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$ d'où :

$$\frac{1}{n + 1} < \ln(n + 1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

3. Soit $N > 0$ un entier. En sommant l'inégalité de droite de 1 à N on obtient :

$$\boxed{\sum_{n=1}^N (\ln(n + 1) - \ln(n)) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}}$$

et en sommant l'inégalité de gauche de 1 à $N - 1$ on obtient :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n + 1} \leq \sum_{n=1}^{N-1} (\ln(n + 1) - \ln(n))$$

donc

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{N-1} (\ln(n + 1) - \ln(n))$$

donc

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 1 \leq \sum_{n=1}^{N-1} (\ln(n + 1) - \ln(n))$$

donc finalement

$$\boxed{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq 1 + \sum_{n=1}^{N-1} (\ln(n + 1) - \ln(n))}$$

donc les deux inégalités sont vérifiées.

4. Comme $\sum_{n=1}^N (\ln(n + 1) - \ln(n)) = \ln(N + 1) - \ln(1) = \ln(N + 1)$ par télescopage, on en déduit que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N (\ln(n + 1) - \ln(n)) = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty$, autrement dit la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

Cas où $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$

5. (a) Par propriété des fonctions puissances réelles, f est dérivable sur $]n, n+1[$ et pour tout réel x dans cet intervalle : $f'(x) = (1 - \alpha)x^{-\alpha}$.

Comme $\alpha > 0$, on a, pour tout x dans $]n, n+1[$, $\frac{1}{(n+1)^\alpha} < \frac{1}{x^\alpha} < \frac{1}{n^\alpha}$

En multipliant par $|1 - \alpha|$ qui est positif, on obtient :

$$\frac{|1 - \alpha|}{(n+1)^\alpha} \leq |1 - \alpha|x^{-\alpha} \leq \frac{|1 - \alpha|}{n^\alpha}$$

c'est à dire

$$\frac{|1 - \alpha|}{(n+1)^\alpha} \leq |f'(x)| \leq \frac{|1 - \alpha|}{n^\alpha}$$

- (b) Soit n un entier naturel non nul. f est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$ donc d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel c dans l'intervalle $]n, n+1[$ tel que :

$$f(n+1) - f(n) = f'(c)(n+1 - n)$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = f'(c)$$

donc

$$\left| \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right| = |f'(c)|$$

et comme $c \in]n, n+1[$, $|f'(c)|$ vérifie l'encadrement précédent d'où :

$$\frac{|1 - \alpha|}{(n+1)^\alpha} \leq \left| \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right| \leq \frac{|1 - \alpha|}{n^\alpha}$$

6. Soit N un entier naturel non nul. En sommant l'inégalité de gauche de $n = 1$ à $n = N$ on obtient :

$$\sum_{n=1}^N \left| \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right| \leq \sum_{n=1}^N \frac{|1 - \alpha|}{n^\alpha}$$

puis en divisant par $|1 - \alpha|$:

$$\boxed{\frac{1}{|1 - \alpha|} \sum_{n=1}^N \left| \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right| \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}}$$

En sommant l'inégalité de droite de la question précédente, de 1 à $N - 1$ et en divisant par $|1 - \alpha|$ on obtient :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{|1 - \alpha|} \sum_{n=1}^{N-1} \left| \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right|$$

puis en faisant un changement d'indice et en ajoutant 1 de chaque côté, comme dans la question 3 :

$$\boxed{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{|1 - \alpha|} \sum_{n=1}^{N-1} \left| \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right|}$$

d'où l'encadrement demandé.

7. Pour une valeur de $\alpha > 0$ différente de 1 fixée, les termes $\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ sont de signe constant dans chaque somme (tous positifs si $\alpha - 1 > 0$, et tous négatifs si $\alpha - 1 < 0$). On a donc quelle que soit la valeur de $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left| \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right| &= \left| \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right) \right| \\ &= \left| 1 - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \right| \end{aligned} \quad \text{par télescopage}$$

et de même :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \left| \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right| = \left| 1 - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right| \quad \text{par télescopage}$$

donc l'encadrement de la question précédente peut se réécrire :

$$\boxed{\frac{1}{\alpha-1} \left| 1 - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \right| \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} \left| 1 - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right|}$$

8. Si $\alpha > 1$, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^{\alpha-1}} = 0$ donc la suite de terme général $1 + \frac{1}{\alpha-1} \left| 1 - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right|$ converge donc est bornée, donc majorée. On en déduit que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est majorée donc comme c'est une série positive la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge d'après le cours.

Si $\alpha < 1$, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$ donc la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Par contraposée on en déduit que si $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge alors $\alpha > 1$, on a donc bien l'équivalence :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$